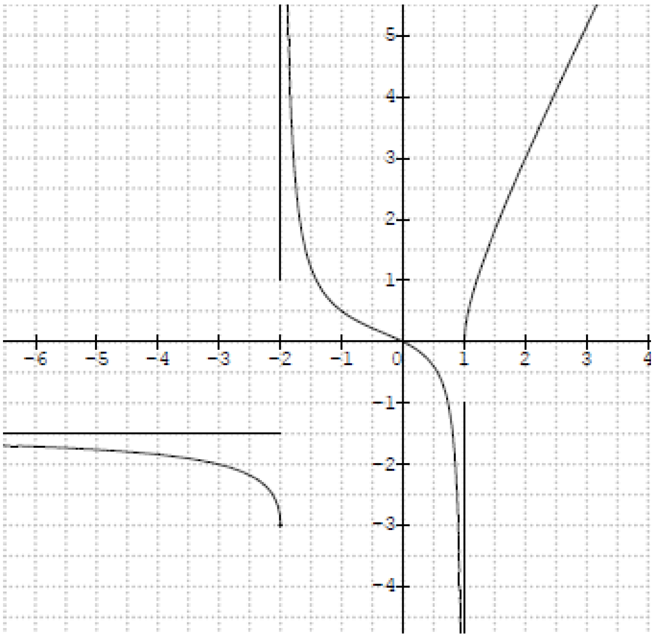
L.B. Monastir	Devoir de Synthèse $n:1$	3 ème Math
P.P. : Ali Zouhaier www.mathmoufid.com	Durée : 120 minutes	02 / 11 / 2013

EXERCICE 1 (4 points)

On donne dans la figure si dessous la courbe d'une fonction f. Soit les points $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$ et $B\left(0;-\frac{1}{2}\right)$. La droite (AB) : $y = 2x - \frac{1}{2}$ est l'asymptote à C_f (courbe de f) au voisinage de $+\infty$.



A l'aide du graphique Déterminer :

1/ $f([0,1[)$.

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right)\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x) + \frac{3}{2}}$.

4/ Donner, en justifiant, le sens de variation de la fonction
$g : x \mapsto g(x) = f(x) - x$ sur]-2;1[.

EXERCICE 2 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$. par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+3} - 2x & \text{si } x > 1 \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} & \text{si } x \in]-1,1] \\ f(x) = \dfrac{m^2x^2+1}{x^2-4x-5} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

m étant un paramètre réel.

1/a- Vérifier que $\forall x > 0;\ f(x) + x = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$.

b- Déduire que C_f, la courbe de f, admet une asymptote oblique que l'on précisera.

2/ Etudier la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

3/ f est-elle prolongeable par continuité en (-1) ?

4/ Etudier la continuité de f en 1.

5/a- Vérifier que $\frac{1-x}{x+1} = -1 + \frac{2}{x+1}$; pour tout x de $]-1;1]$.

b- Montrer alors que f est strictement décroissante sur $]-1;1]$

c- Donner alors le tableau de variation de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$; $\forall x \in]-1;1]$

6/a- Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

b- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $]-1;1]$

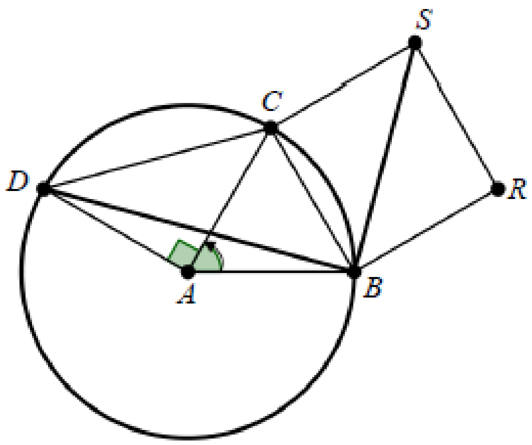
c- Vérifier que $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1$.

EXERCICE 3 (4 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un cercle Γ de centre A et de rayon 4. Soient B, C et D trois points de (C) tels que

$\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

On considère le carré BRSC. (Voir figure ci-dessous)



1) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BA})$.

2)**a** – Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.

b – En déduire que $\widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)} \equiv \frac{\pi}{12} \quad [2\pi]$

3) Déduire de ce qui précède que $(BS) \perp (DB)$.

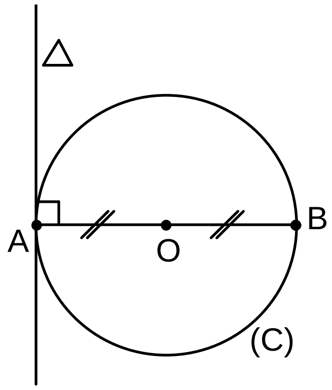
4) Déterminer l'ensemble E des points M vérifiant $\widehat{\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

Nom et prénom : ....

EXERCICE 4 (4 points)

Choisir la bonne proposition.

Dans le plan P orienté dans le sens direct on considère la figure ci-dessous: (C) est le cercle de diamètre $[AB]$, Δ est la perpendiculaire à (AB) en A.



E={M∈ P /	$[AB)\setminus\{A\}$	$[AB]\setminus\{A,B\}$	$[AB)$	$\overset{\frown}{BA}\setminus\{A,B\}$	$(C)\setminus\{A,B\}$	Δ
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=0$ }						
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=AM\times AB$ }						
$\widehat{\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)}\equiv 0\ [2\pi]$ }						
$\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\equiv \pi\ [2\pi]$ }						
$\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ }						
$\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}=\frac{\pi}{2}+k\pi;$ avec $k\in\mathbb{Z}$ }						

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/ $f([0,1[) = [0;-\infty[$

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0$

3/ La droite (AB) : $y = 2x - \dfrac{1}{2}$ est l'asymptote à C_f (courbe de f) au voisinage de $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \left(2x - \dfrac{1}{2}\right)\right) = 0.$

. C_f est au dessous de son asymptote D:y=-$\dfrac{3}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x) - \left(-\dfrac{3}{2}\right)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty.$

4/ Soit $(a,b) \in (]-2;1[)^2$ tel que $a < b$

donc $-a > -b$ et $f(a) > f(b)$ (car f est décroissante sur $]-2;1[$)

alors $f(a) - a > f(b) - b$ c'est à dire $g(a) > g(b)$

Ce qui explique que g est décroissante sur $]-2;1[$.

EXERCICE 2

1/a) $\forall x > 0;\ f(x) + x = \sqrt{x^2+3} - 2x + x = \left(\sqrt{x^2+3} - x\right)\dfrac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}+x}$

$$= \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} = \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$

Donc la droite Δ : $y = -x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{m^2x^2+1}{x^2-4x-5}$

<u>Premier cas: $m = 0$</u> alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2-4x-5} = 0$

Donc la droite D:y=0 est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$

<u>Deuxième cas: $m \neq 0$</u> alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{m^2x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} (m^2) = m^2.$

Donc la droite D:y=m^2 est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

3/ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} = +\infty$

Donc f n'a pas une limite réelle en (-1) alors elle n'est pas prolongeable par continuité en (-1).

4/ . $f(1) = \sqrt{\dfrac{1-1}{1+1}} = 0.$

. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\sqrt{x^2+3} - 2x\right) = 0 = f(1)$

. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} = 0 = f(1)$

Conclusion : f est continue en 1.

5/a- $\forall x \in]-1;1];\ -1 + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{-(x+1)+2}{x+1} = \dfrac{1-x}{x+1}.$

b- $-1 < a < b \leqslant 1 \Rightarrow 0 < a+1 < b+1 < 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{b+1} < \frac{1}{a+1}$$

$$\Rightarrow 1 \leqslant \frac{2}{b+1} < \frac{2}{a+1}$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant -1+\frac{2}{b+1} < -1+\frac{2}{a+1}$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{1-b}{1+b} < \frac{1-a}{1+a}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} < \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$$
$$\Rightarrow f(b) < f(a)$$

Conclusion f est strictement décroissante sur $]-1;1]$.

c- Soit $(a,b) \in (]-1;1])^2$ tel que $a < b$

alors $-a > -b$ et $f(a) > f(b)$

Donc $f(a) - a > f(b) - b$ signie que $g(a) > g(b)$

D'où g est strictement décroissante sur $]-1;1]$.

. $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} - x\right) = +\infty$

D'où le tableau de variation de g

x	-1	1
g(x)	$+\infty$	-1

6/a- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

b- ◊ g est strictement décroissante sur $]-1,\frac{1}{2}]$

donc $\forall x \in]-1;\frac{1}{2}]$; $g(x) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = 0.07735 > 0$

alors l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-1;\frac{1}{2}]$

C'est à dire l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]-1;\frac{1}{2}]$.

♦ g est continue , strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)g(1) < 0$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

signifie que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$

Bilan: ◊ et ♦ donnent que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $]-1,1]$.

c) $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}} = \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1-\alpha}{\alpha+1}$
$$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha+1) = 1-\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2+\alpha = 1$$

EXERCICE 3

1) $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)} \quad [2\pi]$
$$\equiv \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$
$$\equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi].$$

. $\widehat{\left(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ car BRSC est un carré direct
$$\equiv \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi].$$

2)a- $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ est un angle orienté inscrit dans Γ qui intersepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un angle orienté au centre de Γ qui intersepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi].$

b- $\widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

(car DAC est un triangle direct, isocèle et rectangle en A)

$\equiv \frac{\pi}{12} \quad [2\pi].$

3/ $\widehat{\left(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BD}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{7\pi}{12} - \widehat{\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{7\pi}{12} - \widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)} \quad [2\pi]$ car ABD est isocèle en A.

$\equiv \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \quad [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

D'où $(BS) \perp (BD)$.

4/ $M \in E \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)} \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow M \in \overset{\frown}{CB} \setminus \{C;B\}$ avec $\overset{\frown}{CB} \subset \Gamma$

Conclusion :

L'ensemble E est l'arc orienté $\overset{\frown}{CB}$ de Γ privé des point C et B.

EXERCICE 4

$E=\{M\in P$ /	$[AB)\setminus\{A\}$	$[AB]\setminus\{A,B\}$	$[AB)$	$\overset{\frown}{BA}\setminus\{A,B\}$	$(C)\setminus\{A,B\}$	Δ
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 0\}$						✓
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = AM \times AB\}$			✓			
$\widehat{\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)} \equiv 0\ [2\pi]\}$	✓					
$\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)} \equiv \pi\ [2\pi]\}$		✓				
$\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\}$				✓		
$\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)} = \frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}\}$					✓	